DOI: 10.22067/jacsm.2022.76213.1113 *https://mechanic-ferdowsi.um.ac.ir/?lang=en*

The Effect of Material Degradation on the Bending of Laminated Plates

Research Article

Meisam Mohahmmadi[1] Mojtaba Mahmoodi[2]

1. Introduction

Due to the development and advances in various fields of engineering, applying materials with special characteristics is considerable. Low weight, different mechanical, chemical and physical properties of composites in comparison with the isotropic materials, leads to wide utility of composite materials in industry. Environmental conditions affect the composite products and therefore un-expected behaviors are seen.

Moisture, heat, magnetic field, X-rays, infrared rays, UV rays, flams etc. are some of the important environmental parameters. In marine and aviation industries, heat and moisture are some of the most important environmental conditions that affect the efficiency of structures. Thus, study of the variation in behavior of composite structures in hygrothermal environment is evitable.

In the present study, using the available model of material degradation in the literature due to the hygrothermal conditions, bending of lamented plates is investigated. Variations of elasticity modulus and coefficient of thermal expansion due to the heat and moisture are considered in the used material degradation model.

2. Equilibrium equations

In order to derive the governing equilibrium equations for bending analysis of laminated plate, classical plate theory is used. Based on this theory, the components of displacement field are

$$u_1(x,y,z)=u-zw_{,x} \qquad u_2(x,y,z)=v-zw_{,x} \qquad u_3(x,y,z)=w(x,y) \tag{1}$$

In equation (1), u_1, u_2 and u_3 are components of displacement field in z distance of midplane in x, y and z direction, respectively.

Using the principle of minimum total potential energy, the governing equation for bending analysis of symmetric laminated cross plate is obtained as

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+(2D_{12}+4D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=q(x,y) \tag{2}$$

In the above equation, $q(x,y)$ is the distributed load on the surface of plate and D constants are the equivalent flexural rigidity in various directions.

3. Material degradation in hygrothermal environment

For studying the effect of environmental conditions on the mechanical properties of composite plate, the experimental model proposed by Chamis is used. According to this model, the elasticity modulus and coefficient of thermal expansion are affected in hygrothermal situation.

Therefore, the degraded elasticity modulus is

$$E_{new}=E_0\sqrt{\frac{(T_{GW}-T)}{T_{GD}-T}} \tag{3}$$

In which T denotes temperature and the subscript GW and GD show the glass transition temperature in wet and dry states. The glass transition temperature is related to the moisture content through the following relation

$$T_{GW}=\left(0.005M_m^2-0.1M_m+1\right)T_{GD} \tag{4}$$

In equation (4), M_m is the moisture absorbed by the polymer composite.

4. Exact solution

Levy solution is used for determining the exact solution. According to this solution, it is assumed that plate is simply supported along all edges and double series solution is applied so that the deflection of plate is

$$W_{mn}=\frac{4P_0\left(-1+\cos\left(\frac{m\pi}{a}\right)\right)\left(-1+\cos\left(\frac{n\pi}{b}\right)\right)}{ab\left(\frac{m\pi}{a}\right)\left(\frac{n\pi}{b}\right)\left(D_{11}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4+\ldots\right.}$$

$$\overline{\left.\ldots\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2(2D_{12}+4D_{66})+D_{22}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^4\right)} \tag{5}$$

5. Numerical results

For numerical study, it is assumed that laminated plate is composed of epoxy and graphite fibers. The material properties are tabulate in Table 1 as [1]:

Table 1. Material properties of Composite

Fiber	Density	1744kg/m3
	Longitudinal modulus	0.21GPa
	Transverse modulus	0.014GPa
	Shear modulus	0.014GPa
	Poisson’s ratio	0.41
Matrix	Density	1273kg/m3
	Elasticity modulus	0.0034GPa
	Poisson’s ratio	0.44

*Manuscript received: 16 April 2021; Revised, 08 May 2021, Accepted, 30 May 2021.
[1] Corresponding author: Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, Vali-e-Asr University of Rafsanjan, Rafsanjan, Iran. **Email:** meisam.mohammadi@vru.ac.ir.
[2] Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, Vali-e-Asr University of Rafsanjan, Rafsanjan, Iran.

In Table 2, nondimensional maximum deflection $\left(\overline{W}=\dfrac{WE_{f11}}{P_0 b}\right)$ is presented for various parameters. According to this table, it is seen that increasing the volume fraction of fibers increases the nondimensional deflection. While increasing the volume fraction of void decreases the nondimensional deflection.

In figure 1, variation of nondimensional deflection versus the change of temperature and moisture content is plotted. According to the figure, increasing the temperature severely decreases the nondimensional deflection.

Table 2. Nondimensional deflection of laminated plate (0/90/0)

$\frac{a}{b}$	$V_f\%$	$V_v\%$	$(T,RHR\%)$			
			(0,0)	(50,10)	(50,30)	(50,70)
0.5	30	0	176.8	179.5	180.4	182.2
		5	177.6	180.3	181.2	183.0
	70	0	79.41	79.89	79.96	80.11
		5	79.64	80.09	80.17	80.32
1	30	0	2211	2294.	2324.	2381.
		5	2225	2308.	2338.	2398.
	70	0	1031	1049.	1052.	1058.
		5	1035	1053.	1056.	1062.

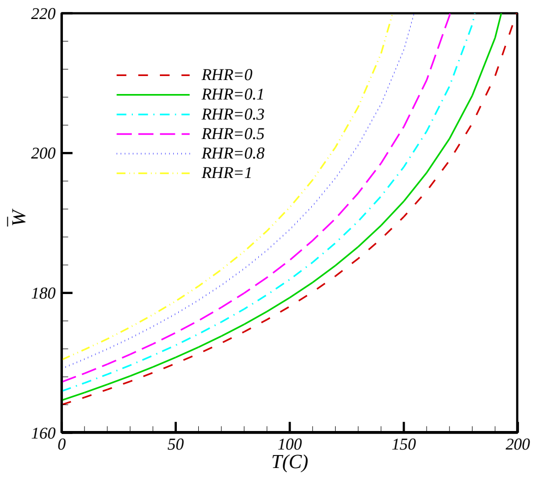


Figure 1. Variation of nondimensional deflection versus the change of moisture and temperature for rectangular $(a/b=0.5)$ laminated composite plate (90/0/0/90)

Also, increasing the moisture content leads to increasing the nondimensional deflection, which is due to the growing up the weight. Numerical results show that increasing temperature and moisture content significantly decreases the bending stiffness of laminated plate. In addition, the effect of temperature is more evident in comparison with the moisture.

In Figure 2, the variation of nondimensional deflection versus the change of void content is depicted. It is clear that the deflection increases as the void content increases.

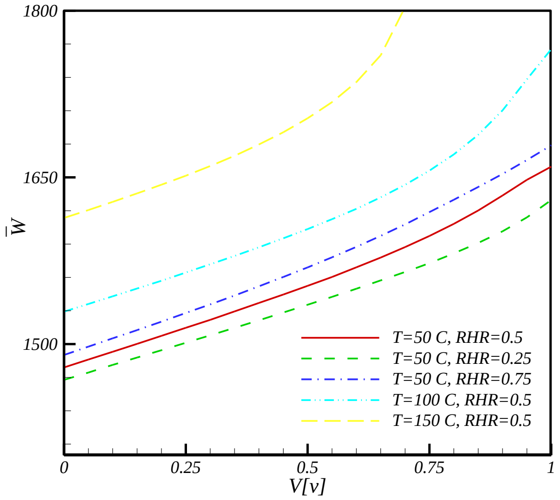


Figure 2. Variation of nondimensional deflection with respect to the void volume fraction for square laminated composite plate (0/90/0)

DOI: 10.22067/jacsm.2022.76213.1113　　https://mechanic-ferdowsi.um.ac.ir/

تأثیر تغییر خواص مواد بر رفتار خمشی ورق‌های چندلایه*

مقاله پژوهشی

میثم محمدی [۱]　　مجتبی محمودی [۲]

چکیده در پژوهش حاضر به بررسی و مطالعهٔ تغییرات خواص مواد در محیط‌های گرم و مرطوب و تأثیر آن بر رفتار خمشی ورق‌های چندلایهٔ کامپوزیتی پرداخته شده‌است. حرارت و رطوبت از جمله عوامل محیطی هستند که بر خواص مکانیکی مواد پلیمری تأثیر زیادی دارد و در نتیجه موجب تغییر رفتار چندلایه‌های کامپوزیتی پایه پلیمری می‌شود. به‌منظور بررسی این تغییر رفتار، یک چندلایهٔ کامپوزیتی بر اساس فرضیات کیرشهف و تئوری ورق‌های نازک، مدل‌سازی و معادلات حاکم بر خمش چندلایه استخراج شده‌است. سپس معادلهٔ حاکم، برای ورق چندلایه با شرایط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده به‌صورت دقیق حل شده و پاسخ بسته برای بررسی‌های عددی مورد استفاده قرار گرفته‌است. به‌منظور بررسی تأثیر عوامل محیطی بر روی خواص مکانیکی این ورق‌ها، از مدل‌های تجربی ارائه‌شده در پژوهش‌های گذشته استفاده شده‌است. در انتها، به‌منظور بررسی بیشتر، تأثیر عوامل دیگر از جمله نظیر ابعاد ورق چندلایه، دما، رطوبت نسبی، کسر حجمی الیاف، کسر حجمی حفره و لایه‌چینی روی خیز بیشینهٔ ورق چندلایه مورد مطالعه قرار گرفته‌است. بررسی‌ها نشان می‌دهد که تغییر میزان رطوبت نسبی یا دما خواص مکانیکی را به‌طور چشم‌گیری کاهش می‌دهد و رفتار ورق چندلایه را تحت تأثیر قرار می‌دهد.

واژه‌های کلیدی ورق‌های چندلایهٔ کامپوزیتی، تغییر خواص ماده، محیط گرم و مرطوب، خمش.

مقدمه

با توجه به گستردگی صنایع و پیشرفت‌های صورت گرفته در زمینه‌های مختلف مهندسی، استفاده از مواد با قابلیت‌های کاری خاص همواره مورد توجه بوده‌است. مواد مرکب (Composites) با ویژگی‌های خاصی نظیر سبک بودن، خواص مکانیکی، شیمیایی و فیزیکی متفاوت در مقایسه با مواد همسانگرد (Isotropic)، به‌طور خاص در صنایع مختلف به کار گرفته می-شوند.

از جمله عوامل محیطی می‌توان به رطوبت، حرارت، میدان مغناطیسی، پرتوهای اشعهٔ ایکس (X rays)، امواج مادون‌قرمز (Infrared rays)، امواج ماوراءبنفش (Ultra Violet or UV rays)، شعلهٔ مستقیم آتش و... اشاره کرد [1]. در صنایع هوایی و دریایی، حرارت و رطوبت از مهم‌ترین و اثرگذارترین شرایط محیطی هستند که می‌توانند بر رفتار تجهیزات و سازه‌های مهندسی اثرات نامطلوب بگذارند.

مالیک (Mallick) در مطالعه‌ای نشان داده که وقتی که یک نمونهٔ پلیمری در دمای بالا تحت آزمایش کشش قرار می‌گیرد، مدول و استحکام آن با افزایش دما کاهش می‌یابد که دلیل آن به موضوع نرمی حرارتی (Thermal softening) برمی‌گردد [1]. هم‌چنین در یک ماده مرکب تقویت‌شده با ماتریس پلیمری (Polymer Matrix) و با الیاف، خواص مؤثر و مهم فاز زمینه یا ماتریس در مقایسه با خواص مهم و مؤثر فاز تقویت کننده یا الیاف، بیشتر تحت تأثیر افزایش دما هستند. به عنوان مثال، استحکام طولی و مدول تک‌جهته (Unidirectional) (با زاویه الیاف صفر) تقریباً با افزایش دما بدون تغییر باقی می‌ماند، درصورتی‌که خواص عرضی و خارج از محور آن به میزان قابل توجهی با افزایش دما و رسیدن به دمای انتقال شیشه‌ای (Glass transition temperature or T_g) پلیمر کاهش می‌یابد.

دوین (Devine) عوارض پیرسازی حرارتی (Thermal aging) بر استحکام خمشی باقی مانده در چندلایه‌های SMC-R شامل چهار نوع متفاوت از رزین‌های پلی‌استر ترموست و یک نوع رزین وینیل استر را گزارش داد [2]. در دمای ۱۳۰ درجه سانتی‌گراد، همه چندلایه‌های SMC-R بیش از ۸۰ درصد استحکام خمشی در دمای اتاق را حتی بعد از گذشت زمان ۱۲ ماه حفظ می‌کند. در دمای ۱۸۰ درجه سانتی‌گراد، تمام لایه‌های SMC-R تغییرات خواص و زوال را نشان دادند. به‌هرحال

*تاریخ دریافت مقاله ۱٤۰۱/۱/۲۷ و تاریخ پذیرش آن ۱٤۰۱/۰۳/۹ می‌باشد.

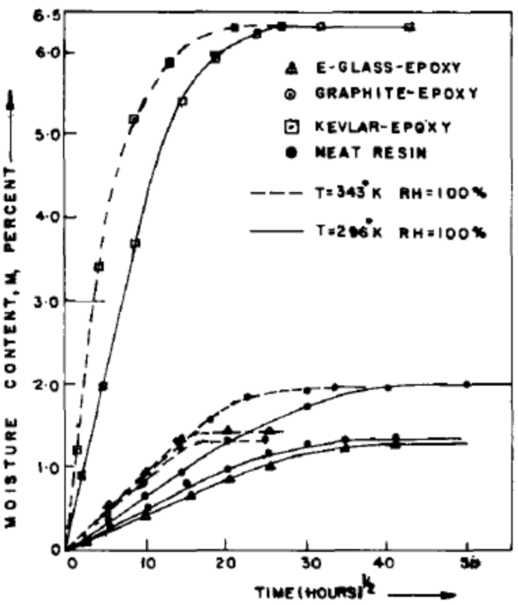
(۱) نویسنده مسئول، استادیار گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان.
Email:meisam.mohammadi@vru.ac.ir
(۲) استادیار گروه مهندسی مکانیک، مجتمع آموزش عالی بم، بم، ایران.

چندلایه‌های وینیل استر دارای استحکام باقی‌مانده بیشتری در مقایسه با همه چندلایه‌های پلی‌استر می‌باشد.

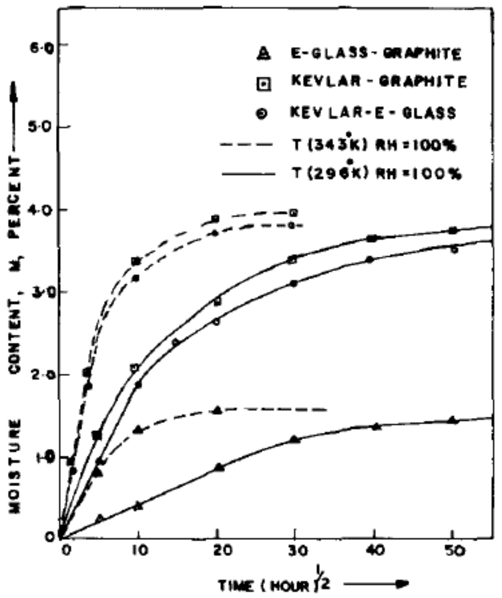
بلاید و همکارانش (Belaid et al.) به بررسی خواص مکانیکی پلی‌استر تقویت‌شده با الیاف شیشه تحت پیرسازی حرارتی تسریع یافته پرداختند [3]. آزمایش موردنظر در دوره‌های زمانی ۳۰، ٦۰، ۹۰ و ۱۲۰ روزه انجام شد. هم‌چنین دمای پیرسازی نیز در ۸۰ درجه سانتی‌گراد ثابت نگه داشته شده بود. آن‌ها مشاهده کردند که خواص مکانیکی به‌شدت تحت تأثیر پیرسازی حرارتی قرار دارد. با افزایش زمان پیرسازی، مدول الاستیـک حدود ۵۰ درصد کاهش می‌یابد و تنش گسیختگی حدود ۲۲ درصد کاهش پیدا می‌کند. آن‌ها دلیل این تغییرات را به رفتار میکرو ساختاری ماتریس و هم‌چنین اتصال بین الیاف و ماتریس نسبت دادند.

گوپالان و همکارانش (Gopalan et al.) به بررسی تأثیر شرایط محیطی بر رفتار مواد مرکب تقویت‌شده با الیاف پرداختند [4]. در آزمایش انجام شده، نمونه‌هایی با ابعاد ۲۵*۲۵*۲ میلی-متر به‌منظور بررسی مشخصه‌های جذب رطوبت توسط مواد مرکب استفاده شد. افزایش وزن نمونه‌ها به‌صورت متناوب تا زمان رسیدن به حالت اشباع مورد بررسی قرار گرفت. درصد افزایش وزن نمونه‌ها نسبت‌به نمونه خشک محاسبه شد. بیشترین غلظت رطوبت در اپوکسی شسته شده و رزین پلی‌استر و هم‌چنین کامپوزیت‌های تقویت‌شده ساده (شیشه (نوع E)–اپوکسی، گرافیت–اپوکسی و کولار–اپوکسی) و کامپوزیت‌های تقویت‌شده هیبریدی (شیشه (نوع E)–گرافیت–اپوکسی، گرافیت–کولار–اپوکسی و کولار– شیشه (نوع E)–اپوکسی) در دماهای ۲٦۹ و ۳٤۳ درجه کلوین (به‌ترتیب ٤/۱۵- و ٦۹/۸۵ درجه سانتی‌گراد) تعیین شدند. منحنی‌های جذب رطوبت نسبت‌به زمان برای کامپوزیت‌های ساده و هیبریدی در شکل‌های (۱) و (۲) نشان داده شده‌اند.

چامیس (Chamis) بر اساس تحلیل‌های میکرومکانیکی و ماکرومکانیکی، به تعیین روابط حاکم بر خواص مکانیکی معادل یک تک لایه بر اساس پارامترهای مؤثر در ساختار آن پرداخت [5]. اثر پارامترهایی نظیر کسر حجمی الیاف، میزان حفره، دما و رطوبت روی تغییرات خواص مکانیکی و حرارتی تک‌لایه مورد بررسی قرار گرفت. هم‌چنین بر اساس آزمایش‌های تجربی، روابطی به‌منظور تغییر خواص مکانیکی تک لایه در محیط‌های گرم و مرطوب ارائه گردید. در این تحقیق اشاره‌ای به تغییرات خواص چندلایه‌ها و اثر زاویه الیاف روی تغییر خواص مکانیکی چندلایه‌ها در محیط‌های حرارتی- رطوبتی نشده‌است.



شکل ۱ منحنی جذب رطوبت نسبت‌به زمان برای کامپوزیت‌های ساده [4]



شکل ۲ منحنی جذب رطوبت نسبت‌به زمان برای کامپوزیت‌های هیبریدی [4]

آزمایش‌های انجام شده به‌وسیله گیلات و بروتمان (Gillat and Broutman) روی چندلایه‌های کامپوزیتی متقاطع اپوکسی تقویت شده با الیاف کربن، نشان می‌دهد که نزدیک ۲۵ در صد

استحکام برشی میان لایه‌ای با افزایش ۱/۵ درصد وزنی غلظت رطوبت کاهش می‌یابد [6].

لورا اس-وتلیک (Laura Svetlik) در مطالعه‌ای تجربی به بررسی تغییرات خواص مواد مرکب تقویت‌شده با الیاف شیشه و ماتریس پلیمری وینیل استر پرداخت و توانست خواص مکانیکی این ماده و تغییرات این خواص تحت تأثیر دما و رطوبت را اندازه‌گیری و ثبت کند [7]. با کمک گرفتن از نتایج ارائه‌شده در این تحقیق، و با استفاده از تکنیک برازش منحنی (Curve fitting) می‌توان توابع تقریبی برای تغییر خواص معادل ماده مرکب تعیین کرد.

بیتنر و همکارانش (Bittner et al.) به بررسی اثرات محیطی به خصوص حرارت روی تغییر خواص و رفتار پنل‌های شیشه‌ای بکار رفته در ساختمان‌های بلند بر اساس مدل‌سازی عددی و تجربی پرداختند [8].

زمانی و حیدری (Zamani and Heidari) به بررسی تحلیلی شکست کامپوزیت‌های پلیمری تقویت‌شده با الیاف شیشه‌ای بر اساس روش‌های مختلف تغییر مواد پرداختند [9]. معیار شکست هاشین در این تحلیل مورد استفاده قرار گرفت. رفتار هر لایه تحت بارگذاری به دقت بررسی و تغییر رفتار مواد با کمک مدل‌های مختلف تغییر خواص مواد مورد تحلیل قرار گرفت. در نهایت، نمودارهای تحلیلی نیرو- جابه‌جایی برای مدل‌های مختلف تغییر خواص مواد با یکدیگر مقایسه گردید.

مختار و بوآزا (Bouazza and Zenkour) به تحلیل ارتعاشات ورق‌های چندلایه ضخیم بر اساس تئوری برشی مرتبه بالا پرداختند [10]. در این تحلیل به بررسی اثر هم‌زمان تغییر رطوبت و دما بر خواص و هم‌چنین فرکانس‌های ورق چندلایه پرداخته شده‌است.

سینگ و زنکور (Singh and Zenkour) به بررسی اثرات محیط‌های گرم و مرطوب بر تغییر پاسخ دینامیکی ورق‌های چندلایه پرداختند [11]. زاویه الیاف به‌صورت متعامد و هم‌چنین تغییر خواص ماده در نظر گرفته شده بود.

با توجه به مرور انجام گرفته، مطالعه رفتار و تغییر خواص چندلایه‌های کامپوزیتی در محیط‌های حرارتی- رطوبتی امری مهم و تأثیرگذار در تحلیل کامپوزیت‌ها می‌باشد. از آن‌جایی که خواص مکانیکی و فیزیکی چندلایه‌ها مورد مطالعه دقیق قرار نگرفته‌است، لذا در این تحقیق با فرضیات چندلایه‌های نازک، به تعیین و بررسی تغییرات خواص مکانیکی و فیزیکی چندلایه‌های کامپوزیتی در محیط‌های حرارتی- رطوبتی و نقش آن‌ها در تغییر خیز ورق‌های کامپوزیتی پرداخته شده‌است.

معادلات تعادل

در این پژوهش، ورق چندلایه مورد تحلیل بر پایه تئوری ورق‌های نازک مدل‌سازی شده‌است. براساس فرضیات کیرشهف (Kirchhoff hypothesis) مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$u_1(x,y,z) = u - zw_{,x}$$
$$u_2(x,y,z) = v - zw_{,x}$$
$$u_3(x,y,z) = w(x,y)$$

(۱)

در رابطهٔ (۱) عبارات u_1، u_2 و u_3 به‌ترتیب مؤلفه‌های جابه‌جایی هر نقطه دل‌خواه به فاصله z از صفحه میانی به‌ترتیب در جهات x، y و z می‌باشد. هم‌چنین u، v و w مؤلفه‌های جابه‌جایی صفحه میانی ورق هستند که تابعی از متغیرهای x و y بوده و زیرنویس (,) نشان‌دهنده عملگر مشتق‌گیری نسبت‌به متغیر متناظر است.

با استفاده از فرضیات فون کارمن و با در نظر گرفتن فرم خطی معادلات کرنش جابه‌جایی، مؤلفه‌های کرنش عبارتند از:

$$\bar{E}_{xx} = u_{,x} - zw_{,xx}$$
$$\bar{\varepsilon}_{yy} = v_{,y} - zw_{,yy}$$
$$2\bar{\varepsilon}_{xy} = (u_{,y} + v_{,x}) - 2zw_{,xy}$$

(۲)

با استفاده از اصل حداقل انرژی پتانسیل و بر پایه اصول حساب تغییرات، معادلات تعادل ورق مستطیلی نازک به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\delta u:\ \ N_{xx,x} + N_{xy,y} = 0 \qquad (۳-۱)$$
$$\delta v:\ \ N_{xy,x} + N_{yy,y} = 0 \qquad (۳-۲)$$
$$\delta w:\ \ (M_{xx,x} + M_{xy,y})_{,x} + (M_{yy,y} + M_{xy,x})_{,y} = q(x,y)$$

(۳-۳)

در رابطه (۳-۳)، $q(x,y)$ بار گسترده بر واحد سطح ورق می‌باشد. هم‌چنین نیروها و ممان‌های منتجه به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\left(N_{xx},N_{yy},N_{xy}\right)=\int_{-h/2}^{h/2}\left(\sigma_{xx},\sigma_{yy},\sigma_{xy}\right)dz$$

$$\left(M_{xx},M_{yy},M_{xy}\right)=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left(\sigma_{xx},\sigma_{yy},\sigma_{xy}\right)zdz$$

(٤)

لازم به ذکر است که با توجه به فرضیات مطالعه حاضر، و این‌که فرض شده‌است که ورق چندلایه روی تمام لبه‌ها دارای تکیه‌گاه ساده می‌باشد، لذا خیز و ممان خمشی برای تمام لبه‌ها باید صفر باشد.

معادلات حاکمه بر چندلایه کامپوزیتی

با توجه به معادلات ساختاری برای یک تک لایه تقویت شده با الیاف ، تنش و کرنش ورق تک لایه به‌صورت زیر به یکدیگر مرتبط می‌شود [12]:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & 0\\ C_{12} & C_{22} & 0\\ 0 & 0 & C_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ 2\varepsilon_{xy}\end{Bmatrix}\qquad (٥)$$

که در آن ماتریس [C] نشان‌دهنده ماتریس سفتی برای ورق اورتوتروپیک می‌باشد و درایه‌های آن برحسب ثوابت مهندسی تک لایه اورتوتروپیک عبارتند از:

$$C_{11}=\frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}},C_{12}=C_{21}=\frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}$$

$$C_{22}=\frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}},C_{66}=G_{12}$$

(٦)

در معادله (٦)، E و G به‌ترتیب مدول الا ستیسیته و بر شی و ν ثابت پواسون می‌باشد.

با توجه به لایه‌چینی صورت گرفته در تشکیل ورق چندلایه و هم‌چنین راستای الیاف با مختصات اصلی مسئله، برای لایه k ام چندلایه، معادلات تنش کرنش به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\{\sigma\}^k=[Q]^k\{\varepsilon\}^k \qquad (٧)$$

که در آن $[Q]^k$ ماتریس تبدیل یافته سفتی پس از ساده سازی به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$[Q]^k=\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12} & Q_{16}\\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26}\\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66}\end{bmatrix}^k \qquad (٨)$$

که

$$Q_{11}=C_{11}m^4+2(C_{12}+2C_{66})m^2n^2+C_{22}n^4$$

$$Q_{12}=(C_{11}+C_{22}-4C_{66})m^2n^2+C_{12}(m^4+n^4)$$

$$Q_{22}=C_{11}n^4+2(C_{12}+2C_{66})m^2n^2+C_{22}m^4$$

$$Q_{16}=(C_{11}-C_{12}-2C_{66})m^3n+(C_{12}-C_{22}+2C_{66})mn^3$$

$$Q_{26}=(C_{11}-C_{12}-2C_{66})mn^3+(C_{12}-C_{22}+2C_{66})m^3n$$

$$Q_{66}=(C_{11}+C_{22}-2C_{12}-2C_{66})m^2n^2+C_{66}(m^4+n^4)$$

(٩)

در روابط (٩) m و n به‌ترتیب سینوس و کسینوس راستای الیاف با راستای اصلی می‌باشد.

بنابراین، نیروها و ممان‌های منتجه ساده شده عبارتند از:

$$N_{ij}=\sum_{k=1}^{N}\int_{z_k}^{z_{k+1}}\sigma_{ij}^{k}dz\,,(ij=xx,yy,xy)$$

$$M_{ij}=\sum_{k=1}^{N}\int_{z_k}^{z_{k+1}}z\sigma_{ij}^{k}dz\,,(ij=xx,yy,xy)$$

(١٠)

با ساده‌سازی معادلات (١٠) می‌توان نوشت:

$$\begin{Bmatrix}N_{xx}\\ N_{yy}\\ N_{xy}\\ M_{xx}\\ M_{yy}\\ M_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & B_{12} & B_{13}\\ & A_{22} & A_{23} & B_{12} & B_{22} & B_{23}\\ & & A_{33} & B_{13} & B_{23} & B_{33}\\ & & & D_{11} & D_{12} & D_{13}\\ & Sym. & & & D_{22} & D_{23}\\ & & & & & D_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_{,x}\\ v_{,y}\\ u_{,y}+v_{,x}\\ -w_{,xx}\\ -w_{,yy}\\ -2w_{,xy}\end{Bmatrix}$$

(١١)

که در آن

$$\left(A_{ij},B_{ij},D_{ij}\right)=\sum_{k=1}^{N}\int_{z_k}^{z_{k+1}}\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12} & Q_{16}\\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26}\\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66}\end{bmatrix}(1,z,z^2)dz$$
$$i,j=1,2,3$$

(١٢)

با در نظر گرفتن این نکته که چنان‌چه زاویه الیاف متعامد در نظر گرفته شود و هم‌چنین تقارن هندسی و مادی در راستای ضخامت وجود داشته باشد، مؤلفه‌های ماتریس [B] صفر شده و وابستگی بین مؤلفه‌های نیروهای منتجه و ممان‌های منتجه حذف شده در نتیجه معادلات (۱–۳) و (۲–۳) از معادله (۳–۳) مستقل شده و این امکان فراهم می‌شود تا با حل معادله (۳–۳)، به بررسی خیز و تنش‌های ایجاد شده در ورق چندلایه پرداخته شود.

بنابراین، معادله (۳–۳) پس از ساده‌سازی عبارت است از:

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (2D_{12} + 4D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y) \qquad (۱۳)$$

معادله (۱۳)، معادله حاکم بر ورق چندلایه نازک با فرضیات زاویه الیاف متعامد و هم‌چنین تقارن مادی و هندسی در راستای ضخامت می‌باشد.

تغییر خواص ماده در محیط گرم و مرطوب

در محیط‌های کاری بسیاری از اجزای سازه‌های هواپیماها، سفینه‌های فضایی، شناورهای دریایی و... شرایط رطوبتی–حرارتی را تجربه می‌کنند [13]. رطوبت جذب شده و تغییرات دمای ایجاد شده باعث تغییر خواص ماده (Material degradation) شده که منجر به کاهش استحکام و سفتی سازه می‌شود که در عملکرد سازه تأثیر می‌گذارد. ازاین‌رو مطالعات مختلفی برای بررسی اثر شرایط حرارت و رطوبت روی پاسخ سازه‌ها انجام شده‌است [5].

وقتی که یک صفحه کامپوزیتی در معرض تماس با محیط مرطوب قرار می‌گیرد رطوبت با سرعت معینی در داخل لایه‌ها نفوذ کرده و سبب افزایش وزن آن می‌شود. افزایش وزن تا زمان اشباع کامل صفحه ادامه دارد. سرعت نفوذ رطوبت به ضریب نفوذ رطوبت وابسته است و این ضریب خود تابعی از دما بوده [14,15] ولی حساسیتی به تغییر درصد رطوبت ندارد [16,17].

چامیس در تحقیقی به بررسی تغییر خواص مواد پلیمری و هم‌چنین تغییر خواص تک لایه‌های پلیمری تقویت شده با الیاف پرداخت [5]. در این تحقیق ضمن مطالعه روابط میکرو مکانیکی حاکم بر تأثیر پارامترهای مختلف در تعیین ثوابت لازم حاکم بر خواص تک لایه، بر پایه آزمایش‌های تجربی روابطی برای تغییرات خواص مکانیکی تک‌لایه‌ها پیشنهاد شده‌است.

طبق روابط میکرومکانیکی ارائه شده، دانسیته لایه کامپوزیت برابر است با:

$$\rho_L = \rho_m V_m + \rho_f V_f \qquad (۱۴)$$

در رابطه فوق، پایین‌نویس‌های m ،f و L به‌ترتیب مربوط به الیاف، ماتریس و چندلایه می‌باشد. هم‌چنین ρ و V نشان‌دهنده دانسیته و کسر حجمی الیاف می‌باشد. به‌علاوه، خواص مکانیکی چندلایه عبارتند از:

$$E_{L11} = E_m V_m + E_{f11} V_f$$
$$E_{L22} = \frac{E_m}{1 - \sqrt{V_f}\left(1 - \frac{E_m}{E_{f22}}\right)} \qquad (۱۵)$$

که در آن E نماینده مدول الاستیسیته و (11) و (22) نشان‌دهنده راستای طولی و عرضی می‌باشد.

بر پایه یافته‌های چامیس، خواص مکانیکی مانند مدول الاستیسیته یک ماتریس پلیمری در محیط‌های حرارتی و رطوبتی تابعی از دمای انتقال شیشه‌ای و هم‌چنین خواص مکانیکی در حالت مرجع و خشک می‌باشد. طبق روابط ارائه شده، مدول الاستیسیته در محیط جدید عبارت است از:

$$E_{new} = E_0\sqrt{\frac{(T_{GW} - T)}{T_{GD} - T}} \qquad (۱۶)$$

در معادله (۱۶)، E_0 مدول الاستیسیته در حالت مرجع، T_{GW} دمای انتقال شیشه‌ای در حالت مرطوب، T_{GD} دمای انتقال شیشه‌ای در حالت خشک و T نشان‌دهندهٔ دما می‌باشد. به‌علاوه، دمای شیشه‌ای در حالت مرطوب به غلظت رطوبت بستگی دارد. از این‌رو:

$$T_{GW} = (0.005M_m^2 - 0.1M_m + 1)T_{GD} \qquad (۱۷)$$

که M_m رطوبت جذب شده توسط کامپوزیت می‌باشد.

با استفاده از روابط بیان شده، می‌توان تأثیر تغییرات دما و رطوبت در تغییر خواص مکانیکی را تعیین و در نتیجه در مدل‌سازی خواص چندلایه استفاده کرد.

تعیین پاسخ دقیق مسئله

از آن‌جا که در ابتدا فرض شد که تمام لبه‌های ورق دارای تکیه‌گاه

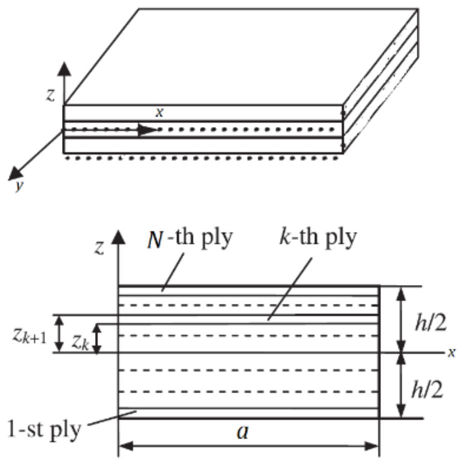
ساده می‌باشد، لذا از حل ناویر (Navier solution) که شامل حل سری‌های دوگانه سینوسی می‌باشد استفاده شده‌است. طبق این روش، به‌راحتی می توان نشان داد که ترکیب دوگانه توابع سینوسی به‌صورت زیر معادله تعادل و هم‌چنین شرایط مرزی را ارضا می‌کند.

$$w(x,y)=\sum_{m=1}\sum_{n=1}W_{mn}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{۱۸}$$

لازم به ذکر ا ست که به‌منظور ا ستفاده از حل ناویر، ب سط دوگانه سینوسی بار گسترده نیز استفاده می‌شود. حل معادله (۱۳) با کمک حل ناویر برای ورق نشان داده شده در شکل (۳) در حالتی که ورق تحت بار گسترده یک‌نواخت قرار دارد، به پاسخ دقیق زیر برای خیز ورق چندلایه منجر می‌شود:

$$W_{mn}=\frac{4P_0\left(-1+\cos\left(\frac{m\pi}{a}\right)\right)\left(-1+\cos\left(\frac{n\pi}{b}\right)\right)}{ab\left(\frac{m\pi}{a}\right)\left(\frac{n\pi}{b}\right)\left(D_{11}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4+\ldots\right.}$$

$$\overline{\ldots\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2(2D_{12}+4D_{66})+D_{22}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^4\Big)} \tag{۱۹}$$



شکل ۳ شماتیک ورق چندلایه با طول و عرض a و b

نتایج عددی

در ابتدا لازم به ذکر است که به‌منظور اعتبارسنجی روابط ارائه شده، معادلات استخراج شده در قسمت‌های قبل با روابط ارائه شده در مراجع [12] و [5] هم‌خوانی دارد.

به‌منظور بررسی نتایج عددی، فرض شده‌است که ورق چندلایه از اپوکسی به همراه الیاف گرافیت ساخته شده‌است. از این‌رو خواص مواد به‌کار رفته عبارتند از [5]:

جدول ۱ خواص مواد تشکیل دهنده کامپوزیت

الیاف	دانسیته	$1744 kg/m^3$
	مدول طولی	0.21GPa
	مدول عرضی	0.014GPa
	مدول برشی	0.014GPa
	ضریب پواسون	0.41
ماتریس	دانسیته	$1273 kg/m^3$
	مدول الاستیسیته	0.0034GPa
	ضریب پواسون	0.44

در ادامه به بحث و بررسی نتایج عددی مختلف پرداخته شده‌است. ذکر این نکته حائز اهمیت است که با حفظ کلیت تحقیق و به‌منظور عمومی‌سازی نتایج، نتایج عددی به‌صورت بی‌بعد ارائه شده‌است. از این‌رو خیز بی‌بعد ورق عبارت است از:

$$\overline{W}=\frac{WE_{f11}}{P_0 b} \tag{۲۰}$$

در جداول (۲) تا (٤) مقادیر عددی و بی‌بعد خیز بیشینه ورق چندلایه تحت بار یک‌نواخت نشان داده شده‌است. در هر جدول، لایه‌چینی‌های متفاوتی در نظر گرفته شده‌است. هم‌چنین مقادیر خیز بی‌بعد برای دماهای مختلف، رطوبت نسبی مختلف، کسر حجمی مختلف الیاف، کسر حجمی متفاوت حفره و نهایتاً ابعاد مختلف جدول‌بندی شده‌است. نتایج عددی نشان می‌دهد که افزایش دما یا افزایش رطوبت نسبی به‌طور چشم‌گیری خیز بی‌بعد ورق چندلایه را افزایش می‌دهد که این نشان از کاهش سفتی معادل ورق چندلایه دارد.

جدول ۲ خیز بی‌بعد ورق برای ورق کامپوزیتی تک‌جهته

$\frac{a}{b}$	V_f%	V_v%	(T, RHR%)						
			(0,0)	(50,10)	(50,30)	(50,70)	(100,10)	(100,30)	(100,70)
0.5	30	0	4632.1	4700.7	4724.1	4768.8	4774.4	4804.8	4867.5
		5	4655.0	4721.6	4745.0	4789.9	4792.8	4823.5	4886.6
	70	0	2077.8	2090.2	2091.8	2095.2	2104.7	2107.2	2112.3
		5	2083.8	2095.3	2097.0	2100.8	2109.7	2111.9	2117
1	30	0	59717	61963	62749	64313	64512	65622	67991
		5	60093	62329	63146	64759	64860	66009	68472
	70	0	27842	28341	28416	28567	28980	29092	29318
		5	27952	28445	28523	28683	29082	29191	29428

جدول ۳ خیز بی‌بعد ورق برای ورق کامپوزیتی سه‌لایه با لایه‌چینی (0,90,0)

$\frac{a}{b}$	V_f%	V_v%	$(T, RHR\%)$						
			(0,0)	(50,10)	(50,30)	(50,70)	(100,10)	(100,30)	(100,70)
0.5	30	0	176.84	179.53	180.45	182.25	182.46	183.68	186.19
		5	177.69	180.33	181.27	183.06	183.16	184.39	186.92
	70	0	79.412	79.896	79.967	80.113	80.490	80.586	80.792
		5	79.640	80.098	80.170	80.323	80.674	80.774	80.977
1	30	0	2211.8	2294.7	2324.0	2381.9	2389.4	2430.1	2518.4
		5	2225.6	2308.5	2338.8	2398.6	2402.2	2444.7	2536.0
	70	0	1031.1	1049.6	1052.5	1058.1	1073.4	1077.3	1085.9
		5	1035.3	1053.5	1056.3	1062.4	1077.0	1081.3	1090.0

به‌علاوه، افزایش کسر حجمی حفره نیز باعث کاهش سفتی معادل چندلایه می شود و در نتیجه خیز بی‌بعد ورق افزایش پیدا می‌کند. هم‌چنین افزایش کسر حجمی الیاف باعث افزایش سفتی ورق چندلایه می‌شود و خیز بی‌بعد کاهش می‌یابد.

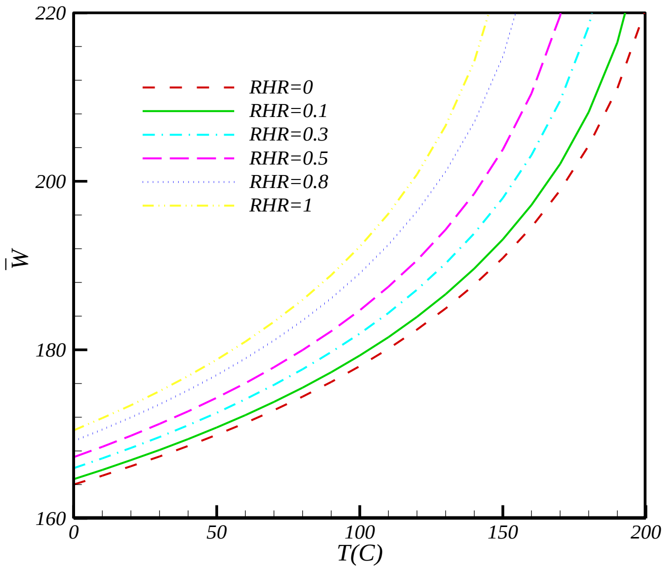
مقایسه نتایج جداول (۳) و (٤) نشان می‌دهد که لایه‌چینی‌های مختلف باعث تغییر چشم‌گیری در نتایج می‌شود. به‌طوری‌که لایه‌چینی (۰/۹۰/۰) مقاومت در برابر خمش بیشتری نسبت‌به لایه‌چینی (۹۰/۰/۹۰) نشان می‌دهد.

در شکل (٤)، به بررسی اثر افزایش دما بر خیز بدون بعد ورق چندلایه در رطوبت‌های نسبی مختلف پرداخته شده‌است. نتایج این نمودار نشان می‌دهد که افزایش دما باعث تغییرات محسوس در رفتار ورق چندلایه می‌شود و با افزایش دما نرخ تغییر خیز بی‌بعد نیز به‌طور محسوسی افزایش می‌یابد. این موضوع به دلیل تغییر زیاد خواص مکانیکی تحت تأثیر دما می‌باشد. هم‌چنین افزایش رطوبت نسبی نیز باعث کاهش خواص مکانیکی می‌گردد.

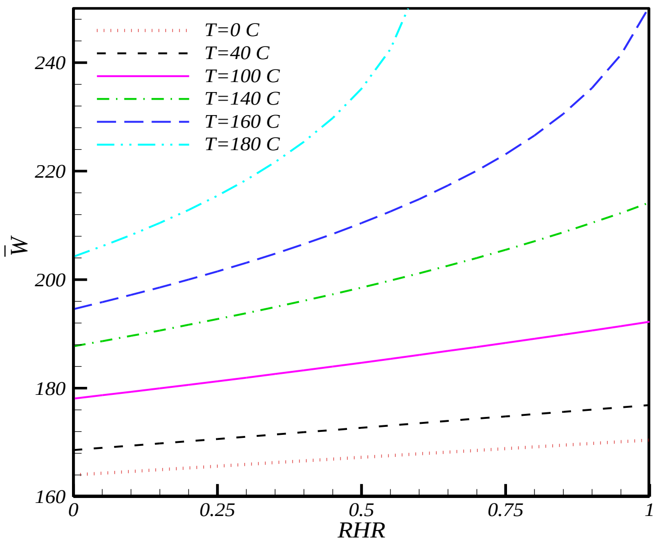
تغییرات خیز بی‌بعد بر حسب تغییرات رطوبت نسبی در شکل (۵) نشان داده شده‌است. نتایج برای ورق مستطیلی با نسبت طول به عرض ۰/۵ دارای چهار لایه با لایه‌چینی (۹۰/۰/۰/۹۰) تعیین شده‌است. بر اساس نمودار نشان داده شده، با افزایش رطوبت نسبی، خیز بی‌بعد نیز افزایش پیدا می‌کند. به‌علاوه می‌توان نتیجه گرفت که تأثیر افزایش دما بیشتر از تأثیر افزایش رطوبت نسبی در تغییر خواص و در نتیجه تغییر رفتار ورق چندلایه می‌باشد. به‌طوری‌که در دماهای بالاتر، افزایش رطوبت نسبی تغییرات بیشتری در خیز بی‌بعد ایجاد می‌کند.

جدول ٤ خیز بی‌بعد ورق برای ورق کامپوزیتی سه‌لایه با لایه‌چینی (90,0,90)

$\frac{a}{b}$	V_f%	V_v%	(T, RHR%)						
			(0,0)	(50,10)	(50,30)	(50,70)	(100,10)	(100,30)	(100,70)
0.5	30	0	752.66	814.99	838.35	887.33	893.87	931.13	1018.0
		5	757.35	820.33	844.91	896.27	899.55	938.82	1030.9
	70	0	392.53	408.48	411.01	416.16	430.57	434.51	442.91
		5	394.35	410.33	412.96	418.37	432.45	436.58	445.36
1	30	0	2211.8	2294.7	2324.0	2381.9	2389.4	2430.1	2518.4
		5	2225.6	2308.5	2338.8	2398.6	2402.2	2444.7	2536.0
	70	0	1031.1	1049.6	1052.5	1058.1	1073.4	1077.3	1085.9
		5	1035.3	1053.5	1056.3	1062.4	1077.0	1081.3	1090.0



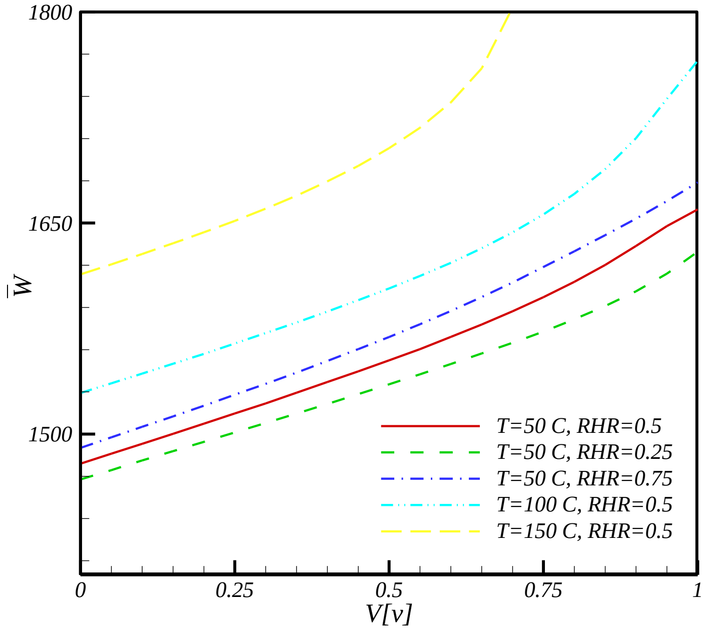
شکل ٤ تغییرات خیز بی‌بعد نسبت‌به تغییر دما و رطوبت نسبی برای ورق چهار لایه (90,0,0,90) مستطیلی $(a/b = 0.5)$



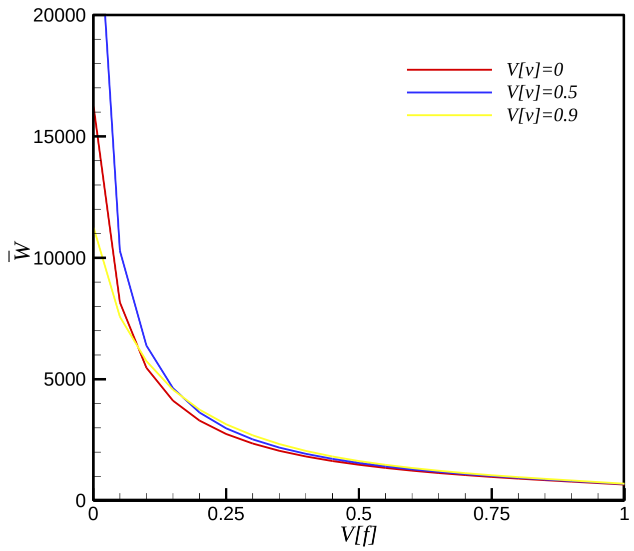
شکل ٥ تغییرات خیز بی‌بعد نسبت‌به تغییر رطوبت نسبی برای ورق چهار لایه (90,0,0,90) مستطیلی $\left(\frac{a}{b} = 0.5\right)$

در نمودارهای (٦) و (٧)، تأثیر کسر حجمی حفره و الیاف روی خیز بی‌بعد ورق چندلایه مربعی نشان داده شده‌است. بر اساس شکل (٤)، افزایش میزان حفره درون ماتریس چندلایه کامپوزیتی باعث کاهش مقاومت در برابر خمش چندلایه می‌شود و در نتیجه خیز بی‌بعد آن افزایش پیدا می‌کند.

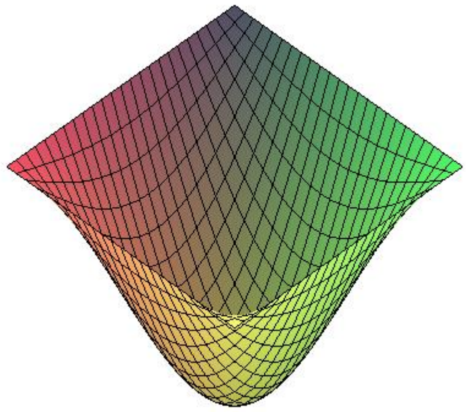
بر اساس نتایج ارائه‌شده در شکل (٧)، افزایش کسر حجمی الیاف باعث افزایش مقاومت به خمش می‌گردد؛ اما در این افزایش حتماً باید ملاحظات اقتصادی را نیز در نظر گرفت چرا که بعد از محدوده مشخصی تغییر در کسر حجمی الیاف تغییر محسوسی در نتایج ایجاد نمی‌کند.



شکل ٦ تغییرات خیز بی‌بعد نسبت‌به تغییر کسر حجمی حفره برای ورق سه لایه (0,90,0) مربعی



شکل ٧ تغییرات خیز بی‌بعد نسبت‌به تغییر کسر حجمی الیاف برای ورق سه لایه (0,90,0) مربعی



شکل ۸ وضعیت تغییر شکل ورق چندلایه پس از اعمال بار گسترده یک‌نواخت

در شکل (۸)، وضعیت تغییر شکل یافته ورق چندلایه تحت بار گسترده یک‌نواخت نشان داده شده‌است.

نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در این پژوهش به بررسی تغییر خواص چندلایه‌های کامپوزیتی در محیط‌های گرم و مرطوب و اثر آن بر تغییر رفتار خمشی ورق چندلایه پرداخته شد. تئوری کلاسیک ورق برای استخراج معادلات تعادل ورق استفاده گردید و به‌منظور حل دقیق معادله تعادل، از روش حل ناویر استفاده گردید. هم‌چنین، از مطالعات تجربی موجود در منابع، به جهت بررسی تغییر خواص مکانیکی چندلایه مورد تحلیل استفاده شد. نتایج عددی نشان می‌دهد که افزایش دما و رطوبت به‌طور محسوسی مقاومت در برابر خمش ورق چندلایه را کاهش می‌دهد. هم‌چنین اثر تغییر دما در مقایسه با تغییر رطوبت محسوس‌تر بوده‌است.

به‌علاوه، افزایش کسر حجمی حفره منجر به کاهش سفتی معادل ورق چندلایه می‌گردد. هم‌چنین ملاحظه گردید که لایه‌چینی در تغییر سفتی معادل سازه تأثیر دارد.

واژه نامه

چندلایه	Laminate
کامپوزیت	Composite
تغییر خواص ماده	Material degradation
محیط گرم و مرطوب	Hygrothermal environment
خمش	Bending
رطوبت نسبی	Relative Humidity
خواص مکانیکی	Mechanical properties
لایه چینی	Layup

مراجع

1. Mallick, P. K., "Fiber reinforced Composites, Materials, Design and Manufacturing", CR press, Book review (2007).
2. Devine, F. E., "Polyester Moulding Materials in Automotive Underbonnet Environments", *Composites*, Vol. 14, No: 4, pp. 353-358, (1983).
3. Belaid, S., Chabira, S. F., Balland, P., Sebba M., and Belhouideg S., "Thermal Aging Effect on the Mechanical Properties of Polyester Fiberglass Composites", *Journal of Materials and Environmental Science*, Vol. 6, No: 10, pp. 2795-2803, (2015).
4. Gopalan, R., Somashekar B.R., and Dattaguru B., "Environmental Effects on Fiber Polymer Composites", *Degradation and Stability*, Vol. 24, No: 4, pp. 361-371, (1989).
5. Chamis, C. C., "Simplified Composite mMicromechanics Equations for Hygral, Thermal and Mechanical Properties", NASA technical memorandum, in: *Ann. Confernce of the Society of the Plastics Industry (SPI) Reinforced Plastics/Composites Inst.* Hoston, USA (1983).
6. Gillat, O., and Broutman, L. J., "Effect of an External Stress on Moisture Diffusion and Degradation in a Graphite-

reinforced Epoxy Laminate”, in: *Symposium on Advanced Composite Materials—Environmental Effects*, *ASTM STP*, pp. 658, USA (1977).

7. Laura Svetlik S., "An Investigation in the Hygrothermal Degradation of an E- Glass/Vinyl-Ester Composite in Humid and Immersion Environments", Ph.D. Thesis. Structural EngineeringUC San Diego, (2008).
8. Bittner T., Tej P., Bouska P., Vokac M., "Degradation of Laminated Glass as Result of Increased Temperature", *Advanced Materials Research*, Vol. 923, No: 2 , pp. 209-212, (2014).
9. Zamani, M.H. and Heidari-Ranani M. "Analytical Progressive Damage Analysis of Laminated Composites Based on Various Material Degradation Models", *The 6th International Conference on Composites Characterization, Fabrication and Application*, Iran, (2018).
10. Bouazza, M., and Zenkour, A. M., "Hygrothermal Environmental Effect on Free Vibration of Laminated Plates Using nth-order Shear Deformation Theory", Waves in Random and Complex Media, Inpress, (2021).
11. Singh, S. K., Chakrabarti A., "Hygrothermal Analysis of Laminated Composites Using C0 FE Model Based on Higher Order Zigzag Theory", *Steel and Composite Structures*, Vol. 23, No: 1, pp. 41-51, (2017).
12. Jones, R., "Mechanics Of Composite Materials", CRC Press, (1998).
13. Zenkour, A. M., Allam, M. N. M., and Radwan, A. F., "Effects of Hygrothermal Conditions on Cross-ply Laminated Plates Resting on Elastic Foundations", *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, Vol. 14, No: 1, pp. 144–159, (2014).
14. Shen, C. H., and Springer, G. S., "Moisture Absorbtion and Desorbtion of Composite Materials", *Journal Composite Materials*, Vol. 10, No: 1, pp. 2-20, (1967).
15. Springer, G. S., "Environmental Effects on Epoxy Matrix Composites”, in: Procceding of *Fifth Conference on Composite Materials,Testing and Design*, pp 291-312, (1979).
16. Allerd, R. E., and Lindrose, A., "The Room Temperature Moisture Kinetics of Kevlar 49 Fabric/Epoxy Laminates", in: Procceding of *Fifth Conference on Composite Materials,Testing and Design*, pp. 313-323, (1979).
17. Augl, J. M., and Trabocco, R., "Environmental Degradation Studies on Carbon Fiber Reinforced Epoxies", Presented at the “Workshop on Durability of Composite Materials, the Battelle Memorial Institue, Ohio, (1975).